1 Primitivní funkce a neurčitý integrál

Definice 1.1. Nechť je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována na intervalu $\mathbf{I}$ libovolného druhu. Pak $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou $\forall x \in \mathbf{I}$ platí $F'(x) = f(x)$ (pokud je x krajní bod $\mathbf{I}$, uvažujeme příslušnou jednostrannou derivaci $F'_+(x)$ nebo $F'_-(x)$), nazýváme *primitivní funkcí* k f na $\mathbf{I}$.

Věta 1.1.

1. *Nechť F je primitivní funkce k f na $\mathbf{I}$. Pak také funkce G definovaná předpisem $G(x) = F(x) + c, x \in \mathbf{I}, c \in \mathbb{R}$ je primitivní funkcí k f na $\mathbf{I}$.*

2. *Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na $\mathbf{I}$, pak funkce $F - G, x \in \mathbf{I}$ je konstantní.*

Tato nejednoznačnost nás vede k vyslovení následující definice.

Definice 1.2. Nechť existuje alespoň jedna primitivní funkce F k funkci f na intervalu $\mathbf{I}$. Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na $\mathbf{I}$ pak nazýváme *neurčitý integrál* funkce f na $\mathbf{I}$ a značíme jej

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c| \ \ c \in \mathbb{R}\}.$$

• Zabývejme se nyní otázkou, pro které funkce má smysl hledat jejich primitivní funkce nebo neurčitý integrál.

Příklad 1.1. Uvažujme funkci

$$f : y = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

a hledejme, zda k ní na $\mathbb{R}$ existuje primitivní funkce.

Řešení: Všimněme si nejdříve, že f není na $\mathbb{R}$ spojitá. Předpokládejme nyní, že primitivní funkce F k f na $\mathbb{R}$ existuje. Podle definice primitivní funkce je $F' = f$, tj. platí

$$F'(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-\infty, 0) \\ 2, & x = 0 \\ 2x, & x \in (0, \infty). \end{cases} \tag{1}$$

Snadno ověříme, že funkce F má tvar

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + c_1, & x \in (-\infty, 0) \\ ? & x = 0 \\ x^2 + c_2, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

kde c_1, c_2 jsou nějaké reálné konstanty. Zbývá nám nalézt hodnotu $F(0)$. Podle předpokladu (**??**) existuje vlastní derivace $F'(0) = 2$. Tedy F je v $x = 0$ spojitá a platí

$$F(0) = \lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x).$$

Máme $\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^-}(x^2 + c_1) = c_1$ a $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+}(x^2 + c_2) = c_2$. Tedy $F(0) = c_1 = c_2$. Nyní můžeme psát předpis pro F jednodušším způsobem, je

$$F(x) = x^2 + c_1, x \in \mathbb{R}.$$

Pak však $F'(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$ a konkrétně $F'(0) = 0$. To je však spor s předpokladem $F'(0) = 2$. Nezbývá, než uznat, že f, která není na $\mathbb{R}$ spojitá, nemusí mít na $\mathbb{R}$ primitivní funkci.

Je snadné ověřit, že $F(x) = x^2 + c$ je primitivní funkce k f na $(-\infty, 0)$ resp. $(0, \infty)$. Na těchto intervalech je však f spojitá. ♡

Věta 1.2. (**O existenci primitivní funkce**) *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ libovolného druhu. Pak f má na $\mathbf{I}$ primitivní funkci.*

2 Výpočet primitivní funkce

Tabulka základních primitivních funkcí

	$f(x)$	$\int f(x)dx$	Obor existence	Poznámka
1.	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{Z}, n > 0$
2.	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$(-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$	$n \in \mathbb{Z}, n < -1$
3.	x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$(0, \infty)$	$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
4.	$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$(-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$	
5.	e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
6.	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$	$a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$
7.	$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$	
8.	$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	
9.	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\ x$	$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$	$k \in \mathbb{Z}$
10.	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotg}\ x$	$(k\pi, \pi + k\pi)$	$k \in \mathbb{Z}$
11.	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$(-1, 1)$	
12.	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$(-1, 1)$	
13.	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\ x$	$\mathbb{R}$	
14.	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\mathrm{arccotg}\ x$	$\mathbb{R}$	$-\mathrm{arccotg}\ x = \mathrm{arctg}\ x - \frac{\pi}{2}$

Věta 2.1. *(***O linearitě primitivní funkce***) Nechť na (a, b) existují primitivní funkce k funkcím f_1 a f_2 a nechť $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Pak existuje primitivní funkce k funkci*

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$$

a platí

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))dx = \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx.$$

- Větu o linearitě lze zobecnit na tvar

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x))dx =$$
$$= \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx + \cdots + \alpha_n \int f_n(x)dx.$$

Věta 2.2. *(***O integraci per-partes***) Nechť funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou definovány na (a, b) a nechť $F' = f$ a $G' = g$ na (a, b). Nechť dále existuje $\int f(x)G(x)dx$ na (a, b). Pak také existuje $\int F(x)g(x)dx$ na (a, b) a platí*

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx.$$

- Tvrzení věty si budeme lépe pamatovat ve tvaru

$$\int FG' = FG - \int F'G.$$

Věta 2.3. *(***První věta o substituci***)*

1. *Nechť funkce $t = \varphi(x)$ zobrazuje interval (a, b) do intervalu (α, β) a nechť na (a, b) existuje vlastní φ'.*

2. *Nechť funkce f má na intervalu (α, β) primitivní funkci F, tj. platí*

$$F(t) = \int f(t)dt,\ t \in (\alpha, \beta).$$

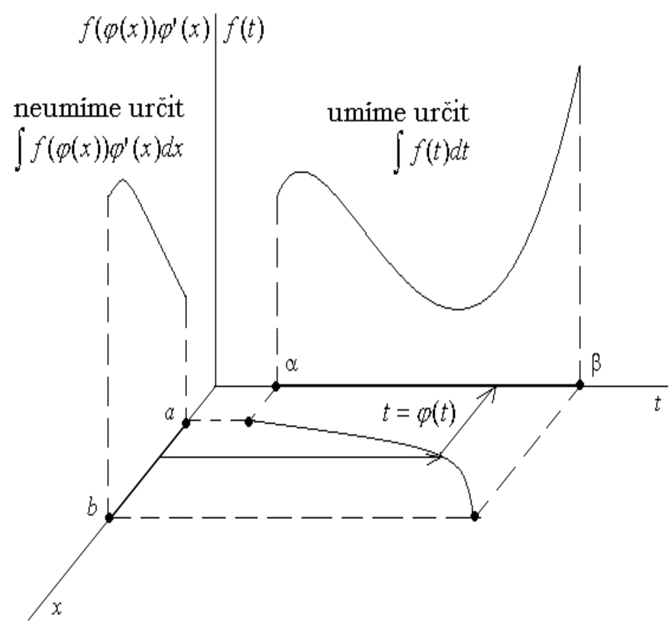
Pak na (a, b) existuje primitivní funkce k funkci $(f \circ \varphi)\varphi'$ a platí

$$\int (f \circ \varphi)(x).\varphi'(x)dx = (F \circ \varphi)(x),\ x \in (a, b)$$

neboli

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)).$$

Následující obrázek ilustruje první větu o substituci.



Uvedeme nyní postup, který nám umožní vypočítat neurčitý integrál z dané funkce pomocí první věty o substituci.

1. Hledáme integrál tvaru $\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)dx$.

2. Pokud funkce f a φ splňují podmínky první věty o substituci, pak

   (a) položíme $\begin{array}{l} \varphi(x) = t, x \in (a, b), t \in (\alpha, \beta) \\ \varphi'(x)dx = dt, \end{array}$

   (b) vypočítáme integrál $\int f(t)dt = F(t), t \in (\alpha, \beta)$ - snad je jednodušší než původní integrál v zadání a umíme ho tedy spočítat.

3. Vrátíme se k proměnné x a hledaný neurčitý integrál má tvar $F(\varphi(x)), x \in (a, b)$.

Stručně to budeme zapisovat takto

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)dx = dt \end{array} \right| = \int f(t)dt.$$

Věta 2.4. *(***Druhá věta o substituci***)*

1. *Nechť funkce $x = \varphi(t)$ zobrazuje interval (α, β) na interval (a, b) a nechť na (α, β) existuje vlastní $\varphi' > 0$ (nebo $\varphi' < 0$).*

2. *Nechť G je primitivní funkce k funkci $(f \circ \varphi)\varphi'$ na intervalu (α, β), tj. platí*

$$G(t) = \int (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt, \ t \in (\alpha, \beta).$$

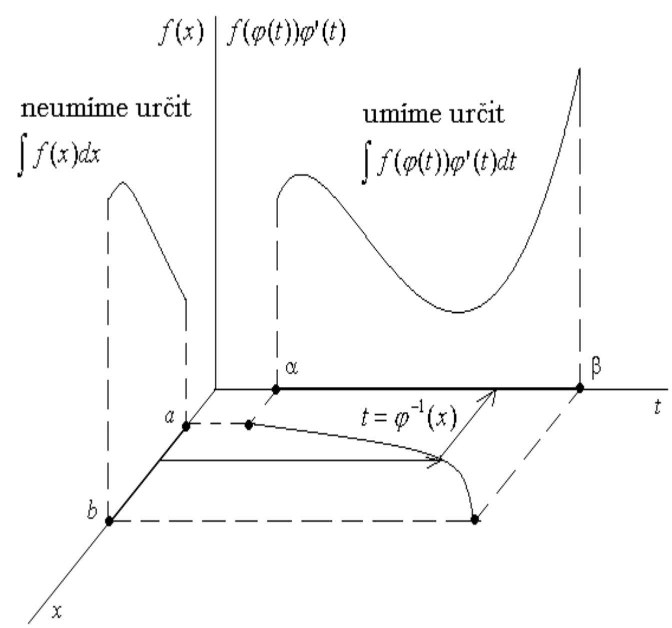
Pak na (a, b) existuje primitivní funkce k funkci f a platí

$$\int f(x)dx = (G \circ \varphi^{-1})(x), \ x \in (a, b)$$

neboli

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)).$$

Následující obrázek ilustruje druhou větu o substituci.



Také zde uvedeme postup, který nám umožní vypočítat neurčitý integrál z dané funkce pomocí druhé věty o substituci.

1. Hledáme integrál tvaru $\int f(x)dx$.

2. Zvolíme nějakou vhodnou funkci φ a pokud funkce f a φ splňují podmínky druhé věty o substituci, pak

   (a) položíme $\begin{array}{l} x = \varphi(t), t \in (\alpha, \beta), x \in (a, b) \\ dx = \varphi'(t)dt, \end{array}$

(b) vypočítáme integrál $\int f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt = G(t), t \in (\alpha, \beta)$ - snad je jednodušší než původní integrál v zadání a umíme ho tedy spočítat.

3. Vrátíme se k proměnné x a hledaný neurčitý integrál má tvar
$G(\varphi^{-1}(x)), x \in (a, b)$.

Stručně to budeme zapisovat takto

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt.$$